



G•E•M•A•D

Ciclo de conferencias

Competencias matemáticas promovidas
desde la razón y la proporcionalidad en
la formación inicial de maestros de
educación primaria

Gabriela Valverde

Universidad de Costa Rica



Universidad de
los Andes
Centro de Investigación y
Formación en Educación - Cife

26 de octubre
8:55 a. m.

Asistencia virtual
<http://videosala.ugr.es/gemad>

Más información
<http://gemad.uniandes.edu.co>

ESTRUCTURA DE LA PRESENTACIÓN

Introducción

Problema
Objetivos
Antecedentes

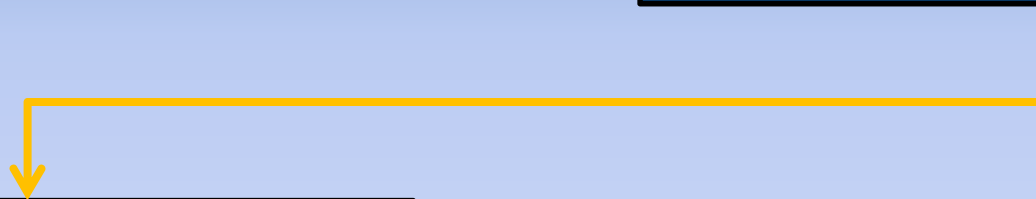
Marco Metodológico

Experimento de Enseñanza
Fases del Experimento
Recolección de Datos
Análisis de la Información

Análisis Retrospectivo de las Sesiones

Tareas: Refresco de cola
Crecimiento de bacterias

Conclusiones, Aportes y Limitaciones



El Problema

¿Cómo promover el desarrollo de las competencias matemáticas y del conocimiento matemático de futuros maestros, en relación con las nociones razón y proporcionalidad?



Resultados del TF de Máster
Dificultades relativas a la
razón y la proporción

Adaptación del "Trabajo de
aula" al **marco curricular
actual** basado en la noción
de competencia

Diseño
instruccional

**Problema de
Investigación**

Enfoque
funcional

Investigaciones previas sobre
conocimientos matemáticos
de los futuros maestros
subconstructos del número
racional

Necesidad de desarrollar la
competencia matemática en
la formación inicial de
maestros
Tarea compleja de abordar



Objetivos Generales

OG1



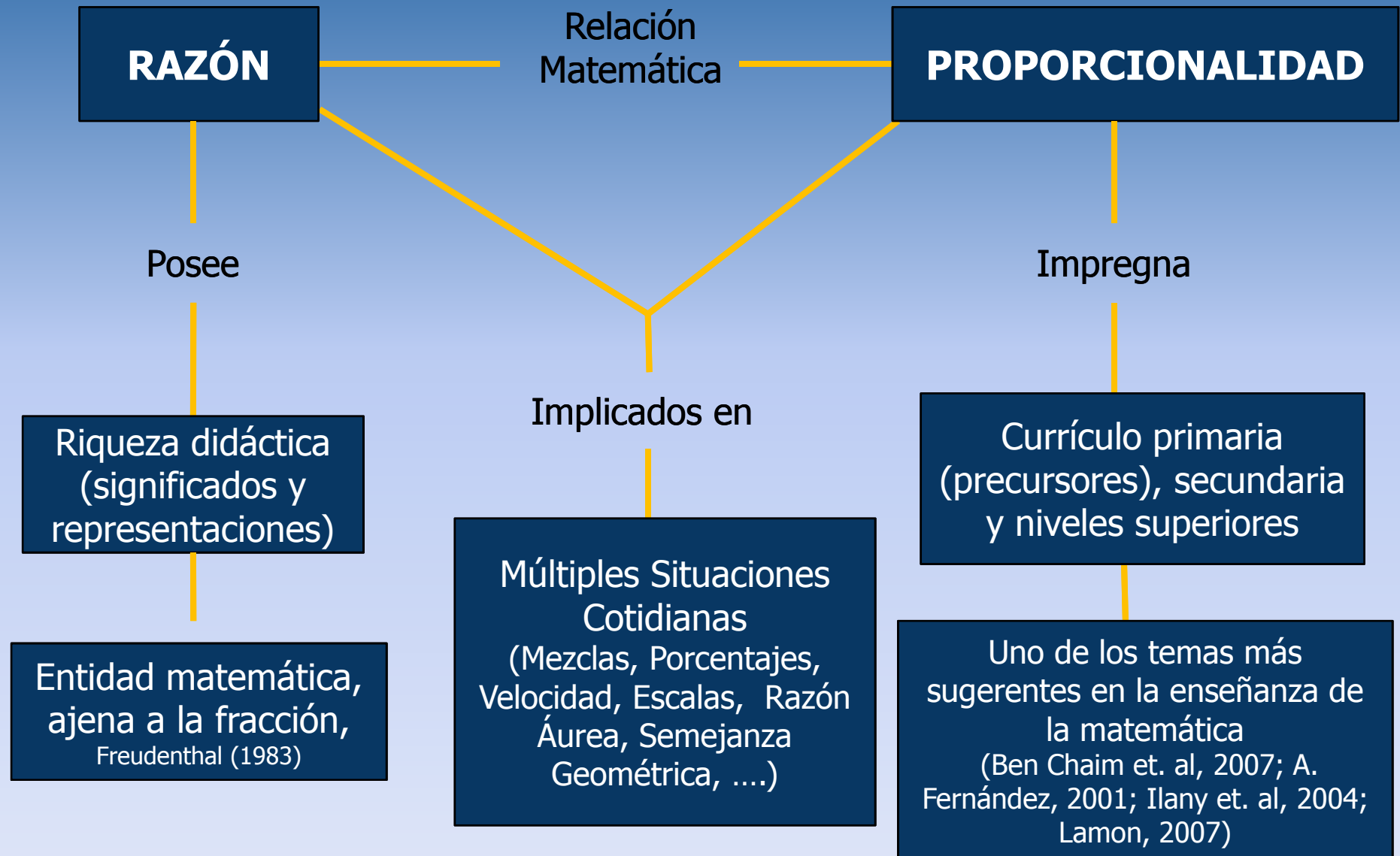
Estudiar el proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis de una “**secuencia de trabajo en el aula**” que aborda la revisión y (o) reconstrucción de conocimientos asociados a la **razón y la proporcionalidad**.

OG2



Investigar cómo **contribuye** esta secuencia en el proceso de desarrollo de la **competencia matemática** de futuros maestros de primaria, resolviendo problemas elaborados para el caso y utilizando una metodología de trabajo colaborativo.

¿Por qué la razón y la proporcionalidad?



Participantes

```
graph TD; A[Participantes] --> B[Grupo 1 (G1)  
85 estudiantes]; A --> C[Grupo 2 (G2)  
42 estudiantes]; B --- C; B --> D[Asignatura Matemáticas y su Didáctica  
Diplomado en Maestro: Educación Primaria  
Plan de Estudios 2001]; C --> D; D --> E[Curso académico 2009-2010  
Universidad de Granada];
```

Grupo 1 (G1)
85 estudiantes

Grupo 2 (G2)
42 estudiantes

Asignatura Matemáticas y su Didáctica
Diplomado en Maestro: Educación Primaria
Plan de Estudios 2001

Curso académico 2009-2010
Universidad de Granada

Antecedentes de la Investigación

Estudios sobre el
Conocimiento
Matemático Común

Descripción del conocimiento
deficiente, limitado

Ball, Lubienski y Mewborn (2001), Chapman,
2004, Ma(1999), Pelead y Herschkovitz (2004)

Desarrollo del conocimiento
5 enfoques predominantes

Ponte y Chapman (2006, 2008)

Estudios sobre los
Subconstructos de los
Números Racionales

Contextos escolares

errores, alternativas didácticas

Kieren (1976), Gairín (1998), Behr, Harel, Post y
Lesh (1992), Vizcarra (2007)

Entornos de profesores en
formación inicial o en activo

deficiente, limitado a parte-todo

Stacey et al. (2001), Ball (1990), Simon (1993)

Antecedentes de la Investigación

Estudios sobre la Razón y la Proporcionalidad

```
graph LR; A[Estudios sobre la Razón y la Proporcionalidad] --> B[Contextos escolares]; A --> C[Entornos de profesores];
```

Contextos escolares estrategias, errores, propuestas de enseñanza

Noelting (1980), Tourniaire y Pulos (1985), Lamon (2007), Fernández (2001), Rapetti (2003), Bjorg (2005), Alatorre y Figueras (2005), Modestou y Gagatsis (2007), Oller (2012)

Entornos de profesores en formación inicial o en activo errores, alternativas didácticas (modelización, auténticas actividades, flexibilidad, herramientas análisis EOS, representaciones)

Ben-Chaim, Ilany y Keret (2008); Berenson y Nason (2003); Berk, Taber, Carrino y Poetzl, (2009); Monteiro (2003); Rivas y Godino (2010); Simon y Blume (1994)

ESTRUCTURA DE LA PRESENTACIÓN

Introducción

Problema
Objetivos
Antecedentes

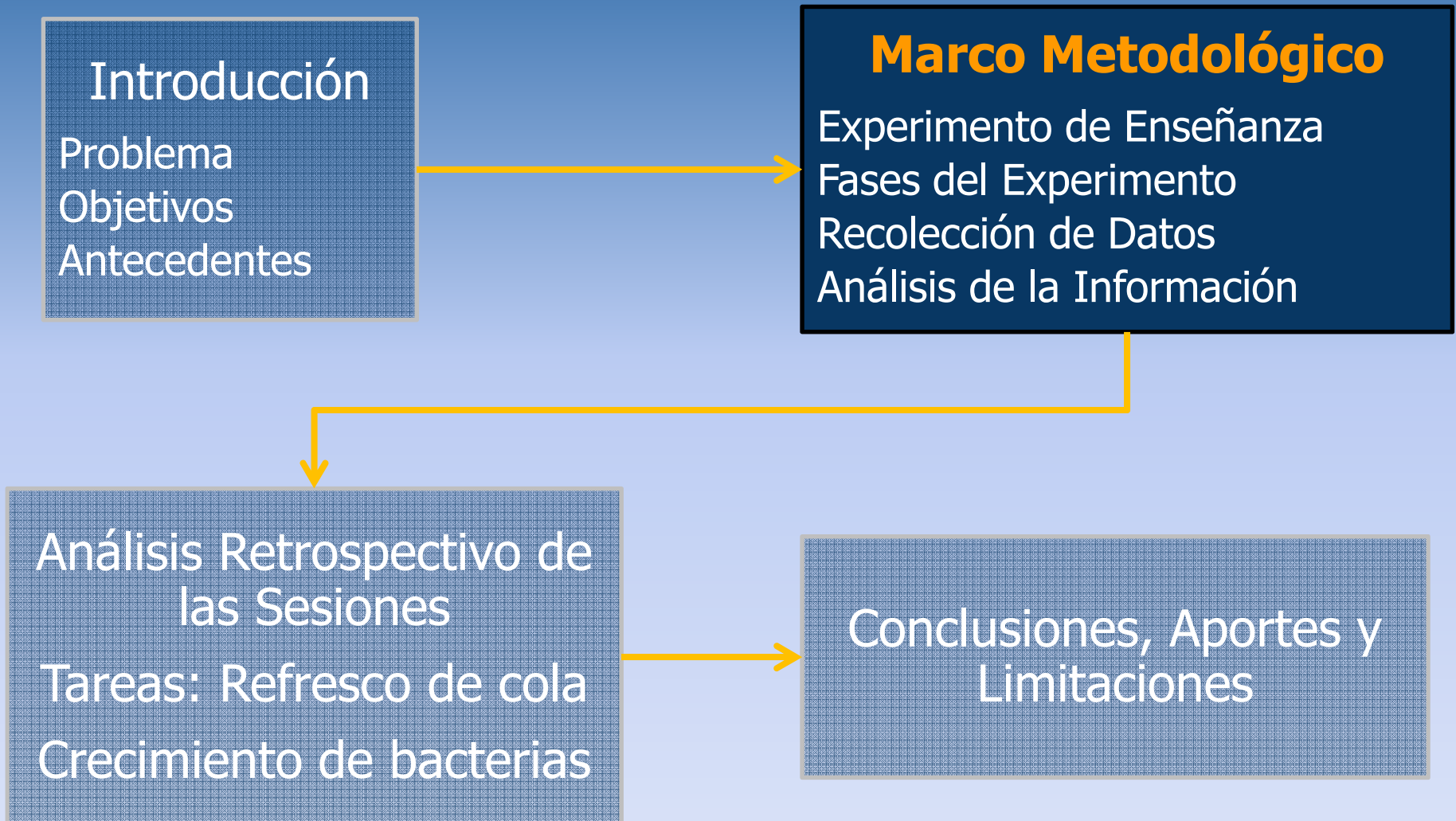
Marco Metodológico

Experimento de Enseñanza
Fases del Experimento
Recolección de Datos
Análisis de la Información

Análisis Retrospectivo de las Sesiones

Tareas: Refresco de cola
Crecimiento de bacterias

Conclusiones, Aportes y Limitaciones



Metodología del Estudio

Tipo de Experimento de Enseñanza



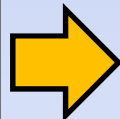
Desarrollo del conocimiento del profesor
Teacher Development Experiment, TDE
(Simon, 2000)

Objetivo del Experimento



Estudiar, desde un enfoque funcional, el conocimiento matemático de los estudiantes.
Promover el desarrollo del conocimiento y de la competencia matemática.

Fundamentación del Experimento



Marco curricular, basado en la noción de competencia matemática (estudio PISA)
Enfoque funcional del conocimiento matemático.

Fases en un Experimento de Enseñanza

**I. Preparación
del Experimento**



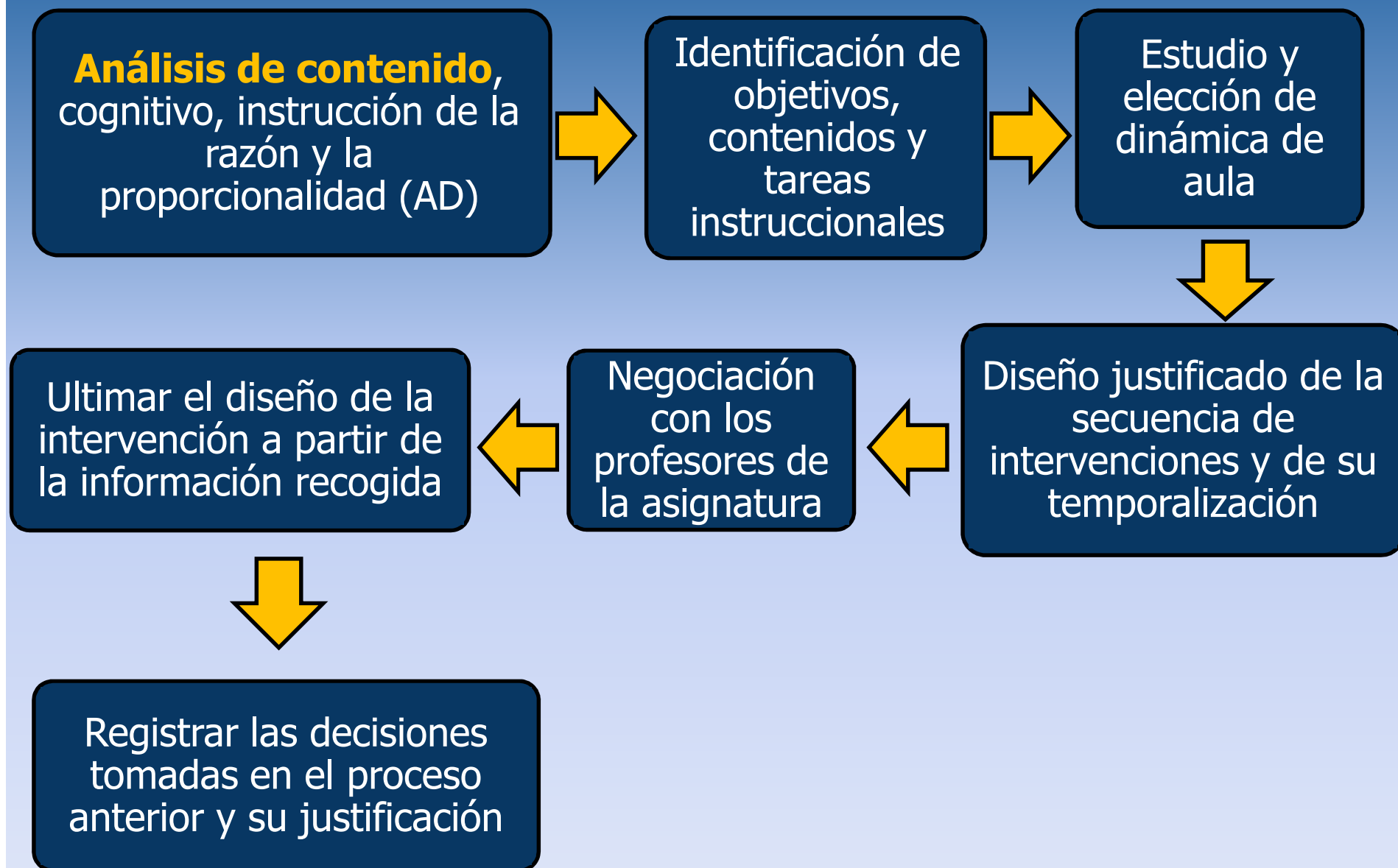
**II. Experimentación y
Análisis entre sesiones**

**Ciclos Iterativos
(Re) Diseño
(Re) Formulación de Supuestos**

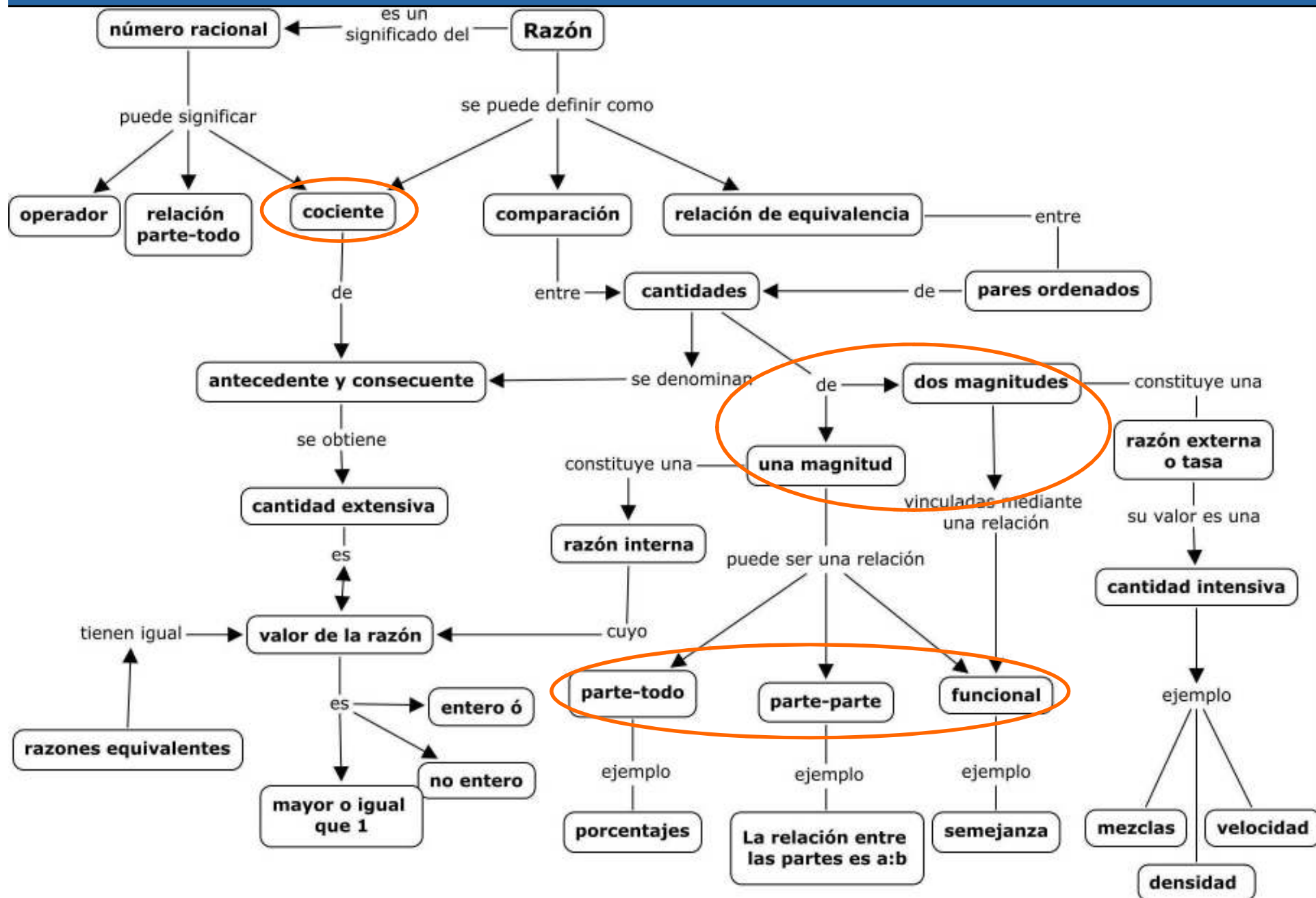
III. Análisis Retrospectivo

Molina, Castro, Molina y Castro (2011). Un acercamiento...

Fase I. Preparación del Experimento



Mapa Conceptual del Foco 1 “Razón: Significados y Usos”



Breve Descripción de la Planificación de la 1ª Sesión

Ejemplos

Objetivos de Investigación para la Primera Sesión

Objetivos Específicos Instruccionales

Contenidos Instruccionales

Tareas Propuestas

1. Conocer las concepciones que muestran los estudiantes en torno a la razón, fracción y porcentaje, así como sobre la relación entre éstas.

8. Detectar las debilidades y fortalezas de la dinámica de trabajo colaborativo aplicada.

2. Describir comparaciones parte-parte y parte-todo, utilizando los subconstructos y representaciones del número racional.

7. Emplear diferentes representaciones para expresar las razones.

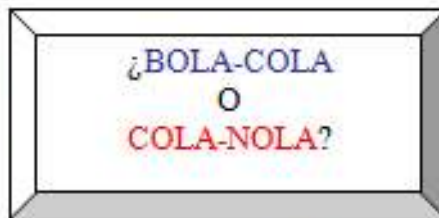
12. Aplicar la noción de razón y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias.

Subconstructos y representaciones de los números racionales: Relación entre fracción, razón y porcentaje. Noción de razón, representaciones y propiedades.

“Fracción, Razón y Porcentaje”

“Preferencia en el Refresco de Cola”

Tarea 2: Preferencia en el Refresco de Cola



Situación pública

Parte-parte

"Todo"
desconocido

Representación verbal

Cantidades de la misma magnitud

Propiedad equivalencia de razones

Comparaciones aditivas y multiplicativas

Objetivos específicos 4, 6 y 7

Contribución a las competencias argumentar, comunicar y representar

Las siguientes afirmaciones podrían ser parte de los resultados de una encuesta de preferencia entre la Bola Cola y la Cola Nola:

- La razón entre quienes prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola es de 3 a 2.
- El número de personas que prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola están en la razón de 17139 a 11426.
- 5713 más participantes prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola.

a. Decide si las tres afirmaciones anteriores hacen referencia a resultados de la misma encuesta. Explica.

b. Elige la afirmación que describe más adecuadamente los resultados de la comparación entre Bola Cola y Cola Nola, explica por qué crees que esa afirmación es más pertinente.

d. Sugiere otras posibles maneras de comparar los resultados de popularidad de los dos tipos de cola.

Fases en un Experimento de Enseñanza

I. Preparación del Experimento



**II. Experimentación
y Análisis entre
sesiones**

Ciclos Iterativos
(Re) Diseño
(Re) Formulación de Supuestos

III. Análisis Retrospectivo

Molina, Castro, Molina y Castro (2011). Un acercamiento...

Fase II. Experimentación: Sesiones

1ª Sesión
25-01-10
(2 h)

F1. Razón: definición, caracterización y tipos

2ª Sesión
28-01-10
(1h)

F4. Porcentajes: significados y usos

3ª Sesión
19-04-10
(2h)

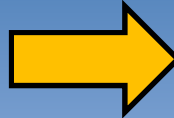
F2. Relación de proporcionalidad: caracterización y representaciones

4ª Sesión
17-05-10
(2h)

F1. Razón: definición, caracterización y tipos
F3. Proporcionalidad geométrica

Fase II. Experimentación: Sesiones

Dinámica de Trabajo
Colaborativo en el Aula



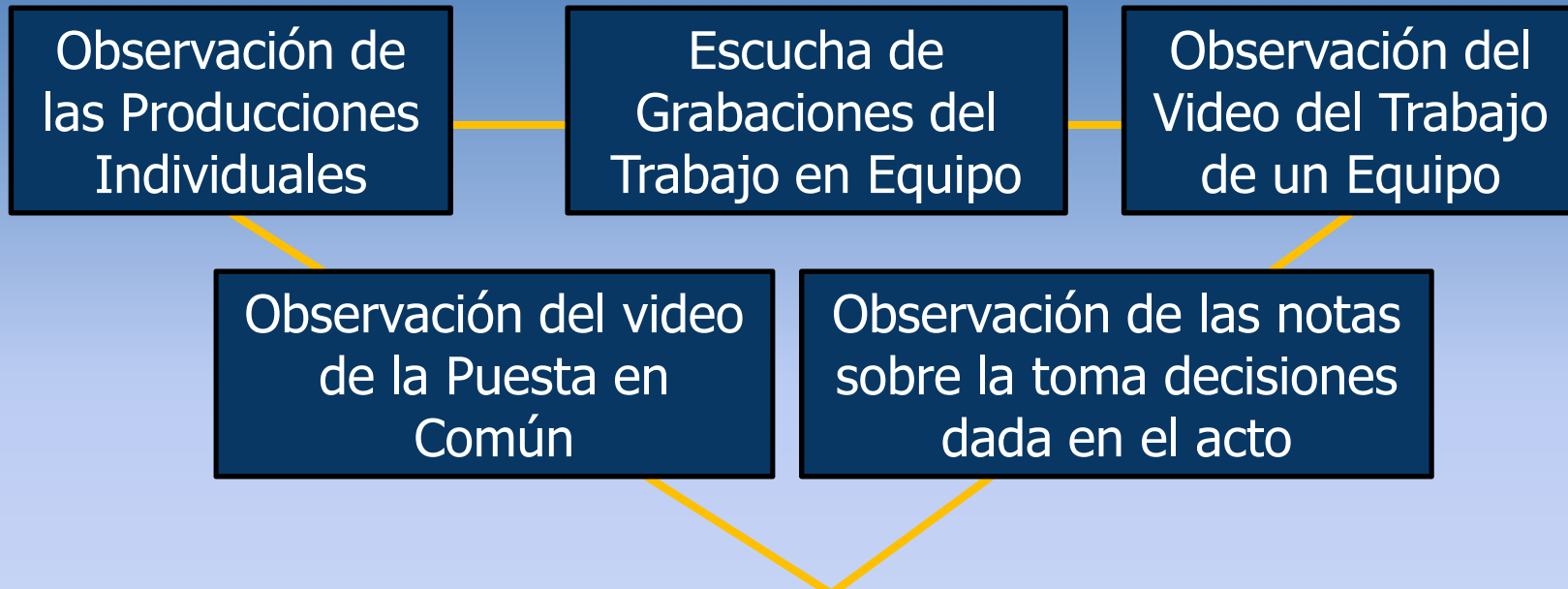
**Adaptación de la
Metodología **ACODESA****

Hitt y Morasse (2008,2009),
Hitt y Cortés (2009), Hitt (2007) ,
Passaro (2007), Páez (2004).

ACO: Aprendizaje Colaborativo
DES: Debate Científico
A: Autorreflexión



Fase II. Análisis entre Sesiones



Toma de **decisiones** orientadas a la **reelaboración** del diseño.

Carácter práctico: tiempo dedicado a cada fase, distribución de estudiantes, papel del investigador, recapitulación de ideas conceptuales.
Tareas: cantidad, secuencia, revisión de enunciados y presentación.

Fases en un Experimento de Enseñanza

I. Preparación del Experimento



II. Experimentación y Análisis entre sesiones

Ciclos Iterativos
(Re) Diseño
(Re) Formulación de Supuestos

III. Análisis Retrospectivo

Análisis de Datos

```
graph TD; A[Análisis de Datos] --> B[Simon (2000, 2012)]; A --> C[Análisis de las Sesiones Pequeño y Gran Grupo]; A --> D[Estudio de Casos Individuos]; C --> E[Análisis Cognitivo y Social]; E --> F[Todos los Equipos de Cada Sesión]; D --> G[Análisis Cognitivo]; G --> H[6 Casos];
```

Simon
(2000, 2012)

Análisis de las Sesiones
Pequeño y Gran Grupo

Análisis Cognitivo y
Social

Todos los Equipos de
Cada Sesión

Estudio de Casos
Individuos

Análisis
Cognitivo

6 Casos

ESTRUCTURA DE LA PRESENTACIÓN

Introducción

Problema
Objetivos
Antecedentes

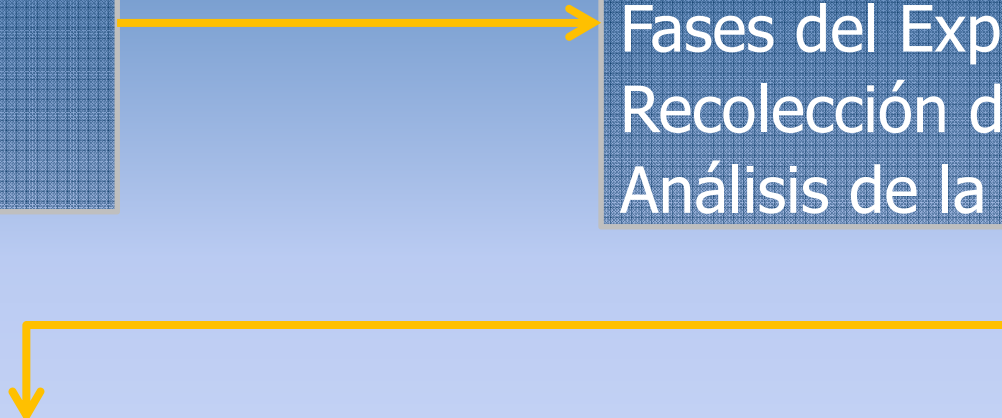
Marco Metodológico

Experimento de Enseñanza
Fases del Experimento
Recolección de Datos
Análisis de la Información

Análisis Retrospectivo de las Sesiones

**Tareas: Refresco de cola
Crecimiento de bacterias**

Conclusiones, Aportes y
Limitaciones



Análisis Retrospectivo de las Sesiones

Propósitos

Profundizar en la intervención
Corte Cualitativo-Interpretativo

Aportar marcos explicativos
Generar conocimiento

Abordar los objetivos parciales
de la investigación

Dimensiones de Análisis

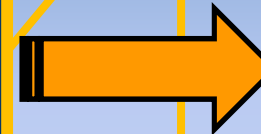
OP1.2
**Conocimiento
Matemático**

OP2.1- OP2.2
**Competencias
Matemáticas**

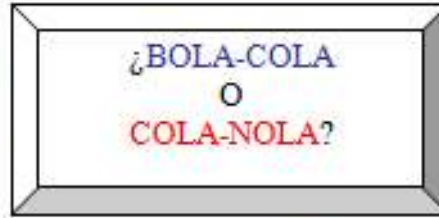
OP1.3
Papel de la
Investigadora

OP1.4
Dinámica de
Trabajo de
Aula

OP1.5
Tareas



Tarea 2: Preferencia en el Refresco de Cola



Las siguientes afirmaciones podrían ser parte de los resultados de una encuesta de preferencia entre la Bola Cola y la Cola Nola:

- *La razón entre quienes prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola es de 3 a 2.*
- *El número de personas que prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola están en la razón de 17139 a 11426.*
- *5713 más participantes prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola.*

a. Decide si las tres afirmaciones anteriores hacen referencia a resultados de la misma encuesta. Explica.

b. Elije la afirmación que describe más adecuadamente los resultados de la comparación entre Bola Cola y Cola Nola, explica por qué crees que esa afirmación es más pertinente.

c. Si necesitaras divulgar los resultados en un anuncio publicitario, ¿cuál afirmación podría ser más efectiva? ¿Por qué?

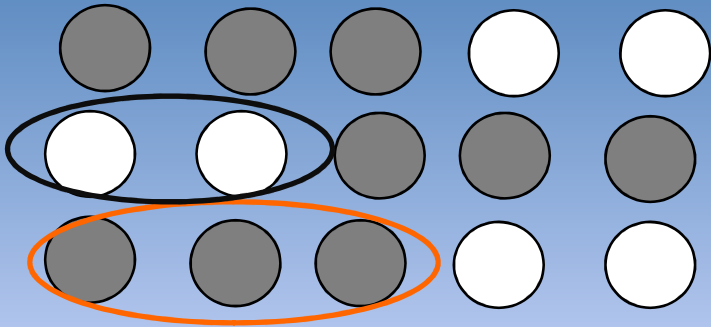
d. Sugiere otras posibles maneras de comparar los resultados de popularidad de los dos tipos de cola.

Resultados: **Dimensión Conocimiento Matemático**

Tabla 1. *Interpretaciones de la expresión "La razón es de 3 a 2"*

G1												
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12
IR1.1	*	*	*	*		*	*	*		*		*
IR1.2	*	*	*			*	*				*	
IR1.3					*							
IR1.4									*			
G2												
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8				
IR1.1		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
IR1.2	*	*	*	*	*							*
IR1.3		*		*	*							
Interpretaciones												
IR1.1: Tres es a dos												
IR1.2: Tres de cada dos												
IR1.3: En tres, hay dos y uno												
IR1.4: Ninguno												

Interpretación IR1.1 . Tres es a dos

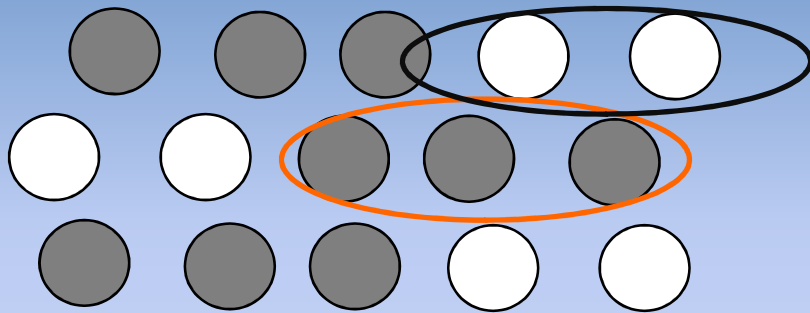


Ejemplo: Fragmento del trabajo oral del equipo E1 (G1) en el que el estudiante A1 expresa:

*"...tres a dos... **tres** prefieren una y **dos** prefieren otra... eso es **de cada cinco tres** quieren una y **dos** quieren otra, de **cada diez seis** quieren una y **cuatro** quieren otra..."*

Interpretación IR1.2 . Tres de cada dos

Tres por cada dos



Normalización de la
razón ligada a la unidad
(A. Fernández, 2001)

Análogo a IR1.1

No se manifestó

Tres de cada dos

Equipo E7 (G1)

*B6: **tres de cada dos** niños
meriendan Cola Bola, de esa,...*

*D6: ¿**tres de cada dos** niños?...*

*F6: es que no, porque ya estás
diciendo **otra afirmación diferente a**
ésta...*

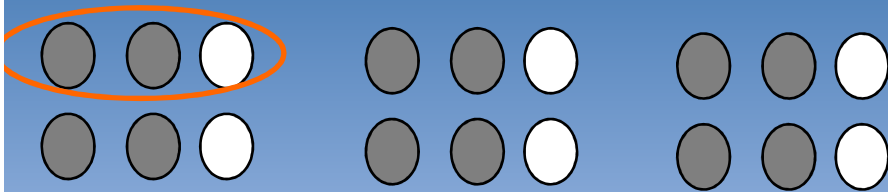
La expresión cotidiana y frecuente de
relaciones del tipo parte-todo

3 de cada **5** españoles...

Débil reflexión de la frase

E11 (G1) manifiesta que no tiene
sentido

Interpretación IR1.3 . En tres, hay dos y uno



Significado distinto a los elementos de la razón 3:2.

La actuación manifestada refleja la interpretación de la razón 3:2 como una relación parte-todo.

Del E5 del G1

*B3: ...un grupo de gente, todos los entrevistados que son todos estos, pues han ido haciendo **pequeños grupos de tres**, de tres, de tres, de tres, de tres y en cada grupo de tres... **dos** prefieren uno y **el otro** prefiere la otra, de cada grupo que forman todos...*

Resultados: Dimensión Conocimiento Matemático

Tabla 2. *Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 2*

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
Interpretaciones de la representación verbal de la razón	IR1.1	Tres es a dos.	75%	87%
	IR1.2	Tres de cada dos.	50%	62%
	IR1.3	En tres, hay dos y uno.	8%	37%
	IR1.4	Ninguna.	8%	0%
Concepciones sobre las Propiedades de la Razón	CPr.1	Concepción sobre la equivalencia de razones.	67%	62%
	CPr.2	Concepción relativa a la diferencia y suma de los elementos de razones equivalentes.	25%	12%
	CPr.3	Concepción sobre la suma de elementos de la razón.	83%	75%

Logro de los Objetivos de Aprendizaje 4 y 12



Competencia Representar (reproducción)
Competencia Resolver Problemas (reproducción)
Competencia Pensar y Razonar (conexión)

Ejemplo: Tercera Sesión (Tarea 4)



Crecimiento de Bacterias

Unos científicos están investigando el comportamiento de una bacteria con el fin de controlar la proliferación de la misma. Se interesan especialmente por el día en que la población sea de 650, porque es cuando deben iniciar una nueva técnica de control de la reproducción. A partir del tercer día el crecimiento de la población se comporta de manera particular, algunas de las primeras observaciones se recogen en la tabla:

Tiempo(días)	3	5	6	8	10	12	15	16
Número de bacterias	39	65	78	104	130	156	195	208

I Fase

- a) Busca relaciones entre estos números y descríbelas.
- b) Intenta utilizar estrategias o técnicas diferentes a la “regla de tres” para averiguar:
 - b.1) El número de días que han transcurrido hasta que el número de bacterias sea de 650.
 - b.2) El número de bacterias después de 25 días.

Explica tu razonamiento en los dos casos anteriores.

Resultados: Dimensión Conocimiento Matemático

Tabla. *Procedimientos alternativos a la regla de tres en el ejercicio (b.2)*

	G1														
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E9	E11	E12	E14	E15	E16	E17	E18
Pr5	*	*	*	*	*		*	*		*	*	*	*	*	*
Pr6			*			*		*	*	*					
Pr7						*									
Pr8						*									

Ejemplo

	G2						
	E1	E2	E3	E5	E7	E10	E11
Pr5	*	*	*		*		*
Pr6					*		*
Pr7	*						*
Pr8				*			

Procedimientos

Pr5: Multiplicación por la constante de proporcionalidad.

Pr6: Detección de relación escalar y aplicación de ésta a cantidades de la otra magnitud.

Pr7: Aplicación de la propiedad $f(a+b)=f(a)+f(b)$

Pr8: Otras

Actuación PR7: Aplicación de la propiedad $f(a+b)=f(a)+f(b)$

Ejemplo

Del equipo E6 del G1

C18: bueno cuántas tenemos..., dos, entonces pues... tenemos sumando tiempos parciales... de días, por ejemplo habíamos dicho que son 25 días, 25 días son...

A4: 10 más 5

C18: 10 más 15 días, es igual a 130 más 195 bacterias ¿no?

A4: sí

b.2) El número de bacterias después de 25 días.

Sumando días p.ej $10+15$ días = $130+195$ bacterias.

Dividiendo $650/2$

Extrapolación, tanteo, resolviendo la ecuación.

Resultados: Dimensión Competencia Matemática

Tabla 3. *Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 4*

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
Conocimiento procedimental para hallar el valor ausente en una proporción directa	Pr5	Multiplicar por la constante de proporcionalidad.	87%	71%
	Pr6	Detectar la relación escalar entre cantidades de días y aplicarla a las cantidades de bacterias.	33%	28%
	Pr7	Aplicar la propiedad $f(a+b)=f(a)+f(b)$.	7%	28%
	Pr8	Otras.	7%	0%

Logro del Objetivo Instruccional 16

Competencia usar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones (conexión)
Competencia pensar y razonar (conexión)

En síntesis...

27
Categorías
de actuación

Foco 2.
Relación de
Proporcionalidad:
Caracterización y
Representaciones

Relaciones entre
cantidades de
magnitudes
proporcionales

Tarea 4: Re1, Re2, Re3,
Re4

Relaciones entre
cantidades de
magnitudes
inversamente
proporcionales

107
Indicadores
de actuación

Representaciones
simbólica y gráfica de la
proporcionalidad directa

Tarea 4: Rep1(D), Rep2(D),
Rep3(D), Rep4(D)

Representaciones
simbólica y gráfica de la
proporcionalidad
inversa

Tarea 5: Rep1.1(I), Rep1.2(I),
Rep2(I)

Procedimientos
aplicados en tareas de
valor ausente con
proporciones directas

Tarea 4: Pr1, Pr2, Pr3, Pr4,
Pr5, Pr6, Pr7, Pr8

Procedimientos
aplicados en tareas de
valor ausente con
proporciones inversas

Tarea 5: Pr1 (I), Pr2 (I), Pr3
(I), Pr4 (I), Pr5 (I)

Propiedades de las
proporciones: reparto
proporcional

Tarea 6: RPr1, RPr2, ErrorRPr

ESTRUCTURA DE LA PRESENTACIÓN

Introducción

Problema
Objetivos
Antecedentes

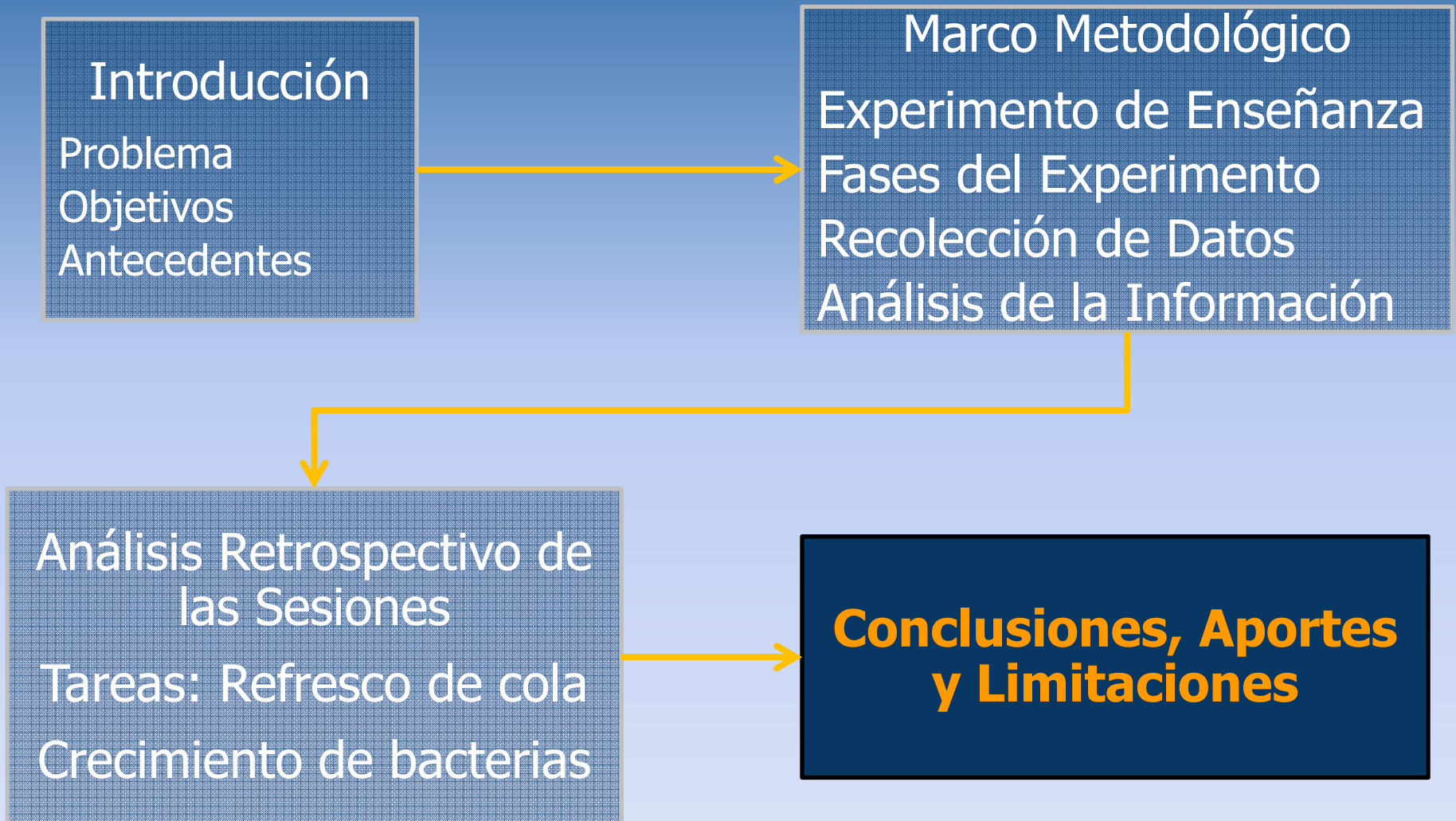
Marco Metodológico

Experimento de Enseñanza
Fases del Experimento
Recolección de Datos
Análisis de la Información

Análisis Retrospectivo de las Sesiones

Tareas: Refresco de cola
Crecimiento de bacterias

**Conclusiones, Aportes
y Limitaciones**



Conclusiones

OP1.1
Análisis Didáctico

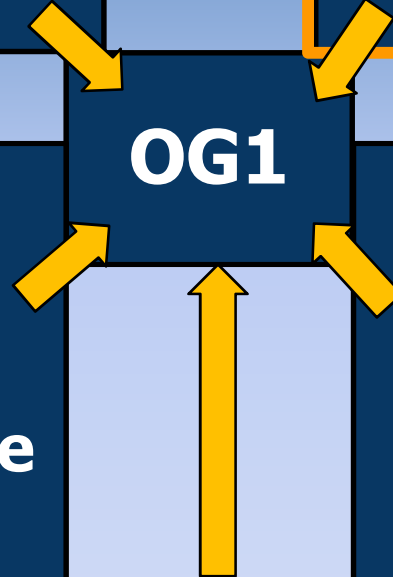
OP1.2
Conocimiento Matemático

OG1

OP1.3
Papel de la Investigadora-Docente

OP1.4
Metodología de Trabajo

OP1.5
Tareas



Conclusiones en Relación con el OG1

OP1.2



Descripción del Conocimiento Matemático

Extensa información de un **entorno natural** sobre la comprensión y negociación de ideas relativas a la **razón y la proporcionalidad**

Descripción de las actuaciones manifestadas (**107 indicadores de CM**)
Aportación de posibles explicaciones

Se sitúan en el ámbito de la **formación inicial de maestros**

Actuaciones vinculadas a **tareas** que **no** corresponden a las tradicionalmente investigadas

Aportes de la Investigación

```
graph TD; A[Aportes de la Investigación] --> B[Diseño instruccional elaborado (tareas, metodología, expectativas)]; A --> C[Estructura de la investigación Uso del Análisis Didáctico y experimentos TDE]; B --> D[Dimensiones teoría-práctica de la investigación en Didáctica de la Matemática]; C --> E[Conocimiento en el campo de investigación centrado en la razón y la proporcionalidad];
```

Diseño instruccional
elaborado (tareas,
metodología, expectativas)

Dimensiones **teoría-práctica** de la investigación
en Didáctica de la
Matemática

Estructura de la investigación
Uso del Análisis Didáctico y
experimentos TDE

Conocimiento en el campo de
investigación centrado en la
razón y la proporcionalidad

Limitaciones de la Investigación

```
graph TD; A[Limitaciones de la Investigación] --> B[Cantidad de sesiones]; A --> C[Complejidad de las nociones razón y proporcionalidad]; B --> D[Poca distancia temporal entre la 1ª y la 2ª sesión]; C --> E[Coordinación de los dos análisis: sesiones e individual];
```

Cantidad de sesiones

Poca distancia temporal
entre la 1ª y la 2ª sesión

Complejidad de las
nociones razón y
proporcionalidad

Coordinación de los dos
análisis: sesiones e
individual



G•E•M•A•D



Universidad de
los Andes
Centro de Investigación y
Formación en Educación - Cife

Ciclo de conferencias

26 de octubre
8:55 a. m.

Competencias matemáticas promovidas
desde la razón y la proporcionalidad en
la formación inicial de maestros de
educación primaria

Gabriela Valverde

Universidad de Costa Rica

Asistencia virtual
<http://videosala.ugr.es/gemad>

Más información
<http://gemad.uniandes.edu.co>